

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 532.546

*Э. Н. Береславский***МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД
ИЗ КОТЛОВАНОВ, ОГРАЖДЕННЫХ ШПУНТАМИ ЖУКОВСКОГО**

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, Российская Федерация, 196210, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38

В гидродинамической постановке рассматривается фильтрация жидкости из котлованов, огражденных шпунтами Жуковского, через слой грунта, подстилаемый хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом, на кровле которого содержится непроницаемый участок. Для изучения инфильтрации на свободную поверхность грунтовых вод формулируется смешанная краевая многопараметрическая задача теории аналитических функций, которая решается с помощью метода Полубариновой-Кочкиной и способов конформного отображения областей специального вида, характерных для задач подземной гидромеханики. Библиогр. 24 назв. Ил. 4. Табл. 1.

Ключевые слова: фильтрация, инфильтрация, грунтовые воды, котлован, шпунт Жуковского, метод Полубариновой-Кочкиной, дифференциальные уравнения класса Фукса, комплексная скорость течения, конформные отображения.

*E. N. Bereslavskii***MODELING THE MOVEMENT OF GROUNDWATER
FROM THE PITS, SURROUNDED WITH PILES OF ZHUKOVSKY**

St. Petersburg State Civil Aviation University, 38, Pilotov ul., St. Petersburg, 196210, Russian Federation

In the hydrodynamic context the filtration of liquids out of foundation pits walled with Zhukovsky grooves is considered. The fluid moves through a layer of soil underlain by a well-permeable pressure aquifer, which is contained in an impermeable area on the covering. For study the infiltration to the free groundwater surface is formulated with a mixed multi-parameter boundary value problem of the theory of analytic function solved by the Polubarinova-Cochina method and other specially designed methods of configuring mapping areas typical for the analysis of underground hydromechanics. Refs 24. Figs 4. Table 1.

Keywords: filtering, infiltration, ground water, ditch, rabbit of Zhukovsky, method Polubarinova-Kochina, Fuchs differential equations, complex flow velocity, conformal mappings.

Фильтрационные течения из строительных котлованов, огражденных симметричными шпунтами Жуковского, рассмотрены в работах [1–11] (см. также [12, 13]). При этом в одних случаях предполагалось, что водопроницаемый слой грунта имеет неограниченную мощность, в других нижележащий сильнопроницаемый напорный пласт моделировался одной или двумя дренами в форме горизонтальной щели Жу-

Береславский Эдуард Наумович — доктор физико-математических наук, профессор; eduber@mail.ru

Bereslavskii Eduard Naumovich — doctor of physics and mathematics sciences, professor; eduber@mail.ru

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

ковского [14]. В ряде работ изучалась свободная фильтрация, т. е. течение без подпора, а в отдельных случаях — напорная, т. е. наличием свободной поверхности пренебрегалось. Во всех упомянутых исследованиях учет инфильтрации не производился. Кроме того, для решения задач были применены разные приемы: функция Жуковского и способ Ведерникова—Павловского, сводящие дело к конформному отображению прямолинейных многоугольников с последующим использованием формулы Кристоффеля—Шварца.

Как показано в [13], практическое применение этих способов лишь тогда приводит к эффективным результатам, когда граница области движения состоит из горизонтальных водопроницаемых и вертикальных водонепроницаемых участков. Однако в реальных условиях гидротехнического строительства котлованов (каналов, водохранилищ) непосредственно под покровными отложениями наряду с горизонтальными водоносными пластами более высокой проницаемости (галечники, гравий, крупнозернистые пески) часто обнаруживаются и горизонтальные водонепроницаемые участки (непроницаемые включения, водоупорные породы), что коренным образом отражается на характере фильтрационных процессов. В подобных ситуациях применение интеграла Кристоффеля—Шварца не приводит к цели, поскольку в областях комплексной скорости потоков возникают уже круговые многоугольники, не сводящиеся непосредственно к прямолинейным.

В отличие от названных исследований ниже, как непосредственное продолжение и развитие предыдущих работ автора (см. [15]), изучается задача о течении жидкости из котлованов через грунтовой массив конечной мощности, подстилаемый хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом, содержащим на своей кровле водонепроницаемый участок, при наличии инфильтрации на свободную поверхность. Рассматривается наиболее общий случай движения, при котором на обоих водопроницаемых участках границы области фильтрации расход принимает экстремальные значения и точка нулевой скорости потока выходит на шпунт (что, по-видимому, до сих пор не встречалось в литературе). Отмечаются предельные случаи течения, связанные с отсутствием как подпора, непроницаемого включения или инфильтрации, так и случай вырождения котлованов в полубесконечную слева полосу затопления, исследованный ранее В. В. Ведерниковым [10]. Приводятся результаты для схемы, возникающей при отсутствии критических точек в том случае, когда скорость обтекания на конце шпунта оказывается конечной; полученное решение является некоторым аналогом классической задачи Жуковского [14].

Для решения смешанной краевой многопараметрической задачи теории аналитических функций используются метод Полубариновой-Кочиной [12, 13], а также разработанные для областей специального вида [16–18] способы конформного отображения круговых многоугольников [19–21], которые весьма типичны для задач подземной гидромеханики. Учет специфики и характерных особенностей движения позволяет представить решения через специальные, а в ряде случаев элементарные функции, что делает их применение простым и удобным.

На основе построенных точных аналитических зависимостей и посредством численных расчетов проводится гидродинамический анализ влияния всех физических параметров схемы на картину явления и отмечаются некоторые особенности разрабатываемых моделей. Результаты математического моделирования для всех предельных случаев сопоставляются с основной фильтрационной схемой.*

* Работа анонсирована ранее в [22].

1. Основная модель. Постановка задачи. Рассматривается плоское установившееся течение из котлована $A'A$ шириной $2l$, огражденного симметричными шпунтами Жуковского одинаковой длины S , через водопроницаемый слой грунта мощности T с нижележащим водоносным горизонтом $E'E$, содержащим подземные или артезианские воды, напор в котором имеет постоянное значение H_0 (рис. 1). На кровле этого пласта расположен водонепроницаемый участок $D'D$, моделируемый горизонтальным отрезком длины $2L$. В силу симметрии картины движения ограничимся изучением правой половины области фильтрации $ABCDEGR$.

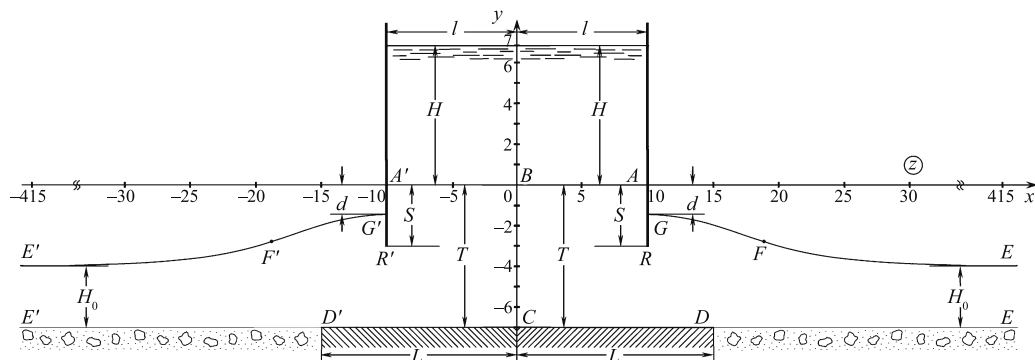


Рис. 1. Картина течения из котлована, рассчитанная при $\varepsilon = 0.6$,
 $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 4$, $l = 10$

Грунтовые воды, обтекая шпунт ARG под действием разности напоров в котловане и нижележащем хорошо проницаемом водоносном горизонте, поднимаются за ним на некоторую высоту RG и, преодолевая точку M нулевой скорости на шпунте, образуют свободную поверхность GE , на которую поступают инфильтрационные воды с интенсивностью ε ($0 < \varepsilon < 1$), отнесенной к коэффициенту фильтрации грунта $\kappa = \text{const}$. Задача состоит в определении положения кривой депрессии GE и, стало быть, высоты RG поднятия грунтовой воды за шпунтом, т. е. величины $S - d$.

Будем полагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации κ и происходит в однородном и изотропном грунте, который считается несжимаемым. Скорость обтекания на острие шпунта v_R принимается бесконечной (до п. 5), глубина воды H в котловане остается неизменной во времени.

При таких условиях, как известно [5, 8, 9, 12], основные уравнения фильтрации жидкости могут быть записаны в виде

$$\varphi = -kh = -k \left(\frac{p}{\gamma} + y \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1)$$

где φ — потенциал скорости фильтрации; u и v — проекции на оси координат скорости фильтрации; h — напор; p — давление в потоке; γ — удельный вес жидкости; y — направленная вверх вертикальная координата. Из уравнений (1) следует, что функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. В связи с этим для исследования плоских задач теории движения грунтовых вод широко применяются хорошо разработанные методы теории аналитических функций.

127

$$P \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 0 & \zeta_F & 1 & \zeta_A & \zeta_{N_1} & \zeta_B & k^{-2} & \zeta_{N_2} & \infty & \\ -1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 3/2 & \zeta \\ -1/2 & 2 & 0 & -1/2 & 2 & -1/2 & 0 & 2 & -1 & \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{Y}{\zeta \sqrt{(1-\zeta)(\zeta_A-\zeta)(\zeta_B-\zeta)(1-k^2\zeta)}}, \quad (3)$$

$$Y = P \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 0 & \zeta_F & 1 & \zeta_{N_1} & k^{-2} & \zeta_{N_2} & \infty & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & \zeta & & \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 2 & 1/2 & 2 & -1 & & & \end{array} \right\}.$$

Видно, что точки $\zeta = \zeta_A$ и $\zeta = \zeta_B$ — обыкновенные точки функции Y , представляющей последний символ Римана, которому соответствует линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с семью регулярными особыми точками, весьма типичное для задач подземной гидромеханики [16–18]. Оно в данном случае имеет вид

$$Y'' + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta-k^{-2}} \right) - \left(\frac{1}{\zeta-\zeta_F} + \frac{1}{\zeta-\zeta_{N_1}} + \frac{1}{\zeta-\zeta_{N_2}} \right) \right] Y' +$$

$$+ \frac{3\zeta^3 + \lambda_2\zeta^2 + \lambda_1\zeta + \lambda_0}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-k^{-2})(\zeta-\zeta_F)(\zeta-\zeta_{N_1})(\zeta-\zeta_{N_2})} Y = 0. \quad (4)$$

Напомним, что наряду с аффиксами ζ_F , ζ_{N_1} и ζ_{N_2} в уравнении (4) аксессуарные параметры λ_0 , λ_1 и λ_2 остаются неизвестными при постановке задачи и должны быть определены в ходе ее решения.

Замена переменных

$$\zeta = \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) \quad (5)$$

переводит верхнюю полуплоскость ζ в прямоугольник плоскости τ : $0 < \operatorname{Re}\tau < 1/2$, $0 < \operatorname{Im}\tau < \rho/2$, $\rho(k) = K'/K$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k [12, 23] при соответствии точек

$$\tau_E = 0, \quad \tau_G = 1/2, \quad \tau_C = (1+i\rho)/2, \quad \tau_D = i\rho/2,$$

а интегралы Y уравнения (4), которые соответствуют символу Римана (3) и построены по методике, разработанной ранее [19–21], преобразуются следующим образом:

$$Y_{1,2}(\tau) = \vartheta_0^{-3}(\tau) \vartheta_1(\tau \pm i\gamma) \vartheta_2(\tau \pm i\beta) \vartheta_2(\tau \mp i\beta) \exp(\pm i\pi\tau). \quad (6)$$

Здесь $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби (синус) при модуле k , $\vartheta_1(\tau)$, $\vartheta_0(\tau)$ — тета-функции с параметром $q = \exp(-\pi\rho)$, который однозначно связан с модулем k [23], α, β, γ — некоторые подходящие постоянные.

Принимая во внимание соотношения (3), (5) и (6), а также то, что функция $w = d\omega/dz$ имеет прежний вид [15]

$$w = i\sqrt{\varepsilon} \frac{\chi^+(\tau)}{\chi^-(\tau)}, \quad \chi^\pm(\tau) = (1 + \sqrt{\varepsilon})Y_1(\tau) \pm (1 - \sqrt{\varepsilon})Y_2(\tau), \quad (7)$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \operatorname{th}\pi(\rho/2 + \beta - \alpha - \gamma), \quad (8)$$

придем к искомым зависимостям

$$\Omega = -\sqrt{\varepsilon}N \frac{\chi^+(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad Z = iN \frac{\chi^-(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad (9)$$

$$\Delta(\tau) = \operatorname{sn}(2K\tau, k) \sqrt{[1 - (1 - k'^2 A^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)][1 - (1 - k'^2 B^2) \operatorname{sn}^2(2k\tau, k)]},$$

в которых $N > 0$ — масштабная постоянная моделирования, $A = \operatorname{sn}(2Ka, k')$, $B = \operatorname{sn}(2Kb, k')$, a и b — неизвестные ординаты точек A и B области τ . В представлениях (9) постоянные конформного отображения α , β и γ , которые связаны соотношением (8), подчинены условиям

$$0 < \alpha < r < \beta < m < a < b < \rho/2, \quad 0 < \gamma < \rho/2, \quad (10)$$

регламентирующим положение на границе области течения точек нулевой скорости M и острия шпунта R , а также N_1 и N_2 ; m и r — неизвестные ординаты точек M и R в плоскости τ .

Можно проверить, что функции (9) удовлетворяют условиям (2), переформулированным в терминах функций $d\omega/d\tau$ и $dz/d\tau$, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись соотношений (9) для разных участков границы области τ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию области движения и тем самым служит контролем вычислений. В результате получаем выражения для задаваемых и искомых геометрических и фильтрационных характеристик модели

$$\int_r^a Y_{RA} dt = S, \quad \int_a^b X_{AB} dt = l, \quad \int_0^{1/2} X_{CD} dt = L, \quad \int_b^{\rho/2} Y_{BC} dt = T, \quad (11)$$

$$\int_b^{\rho/2} \Phi_{BC} dt - \int_0^{1/2} \Phi_{CD} dt = H - H_0,$$

$$d = T - H_0 - \int_0^{1/2} \Phi_{EG} dt, \quad Q = \int_a^b \Psi_{BC} dt \quad (12)$$

и координат точек кривой депрессии EG

$$X_{EG}(u) = l + \int_u^{1/2} X_{EG} dt, \quad Y_{EG}(u) = -d + \int_u^{1/2} Y_{EG} dt, \quad 0 \leq u \leq 1/2. \quad (13)$$

Контролем счета являются другие выражения для величин d , L и фильтрационного расхода Q :

$$d = T - H_0 - \int_0^{1/2} Y_{EG} dt, \quad L = l - \int_0^{1/2} X_{EG} dt - \int_0^{\rho/2} X_{DE} dt, \quad (14)$$

$$Q = \int_0^{\rho/2} \Psi_{DE} dt - \varepsilon \int_0^{1/2} X_{EG} dt.$$

В формулах (11)–(14) подынтегральные функции — выражения правых частей равенств (9) на соответствующих участках контура области τ .

3. Анализ численных результатов для основной фильтрационной модели. Представления (9)–(14) содержат семь неизвестных постоянных: ординаты a, b, r прообразов точек A, B, R в плоскости τ , параметры конформного отображения α, β, γ , удовлетворяющие соотношению (8) и неравенствам (10), а также модуль k ($0 < k < 1$) и постоянную моделирования N . Для их определения при заданных S, l, L, H, T служит система уравнений (11), наряду с которыми используются соотношения

$$w^{-1}(1/2 + ir) = 0, \quad \int_0^{1/2} (\Phi_{EG} + \Phi_{CD}) dt + \int_0^a \Phi_{GA} dt + \int_b^{\rho/2} \Phi_{BC} dt = 0.$$

Первое из них означает, что скорость на конце шпунта обращается в бесконечность, а второе непосредственно вытекает из рассмотрения граничных условий (2). После определения неизвестных постоянных находятся искомые величины d и Q по выражениям (12) и, наконец, по формулам (13) рассчитываются координаты точек свободной поверхности EG .

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 7$, $l = 10$ (базовые значения). В таблице, в которой варьируется в допустимом диапазоне один из указанных параметров, а остальные фиксируются базовыми значениями, приведены результаты расчетов влияния определяющих физических параметров $\varepsilon, T, S, H_0, L, H$ и l на глубину d (отрицательные величины d означают, что свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс) и расход Q . На рис. 3 представлены зависимости величины d и фильтрационного расхода Q от $\varepsilon, T, S, H_0, L, H, l$.

Анализ данных таблицы и рис. 3, *a–жс* позволяет сделать следующие выводы.

Прежде всего обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин d и Q , связанный с уменьшением интенсивности инфильтрации и большей мощности пласта, при которых эти фильтрационные характеристики растут. При возрастании параметров S , H и l наблюдается повышение высоты подъема воды за шпунтом и снижение расхода. К подобному характеру зависимостей величин d и Q приводит, наоборот, падение значений параметров H_0 и L .

Увеличение интенсивности инфильтрации, ширины непроницаемого включения и напора в нижележащем пласте и уменьшение мощности слоя, длины шпунта, напора воды в котловане и его ширины приводят к падению глубины d , т. е. к возрастанию ординаты точки G выхода кривой депрессии из-под шпунта. Так, согласно данным таблицы, увеличению параметров ε, S, H_0 и l в 1.6, 2.0, 2.0 и 1.1 раза сопутствует

Результаты расчетов значений d и Q

ε	d	Q	T	d	Q	S	d	Q	H_0	d	Q
0.5	2.651	0.182	6.5	1.349	0.234	2.0	1.726	0.635	2.0	3.155	0.038
0.6	1.804	0.394	7.0	1.804	0.394	2.5	1.745	0.563	4.0	0.441	0.769
0.7	0.586	0.457	7.5	2.299	0.457	3.5	1.844	0.255	5.0	–0.93	1.159
0.8	–1.195	0.094	8.0	2.745	0.627	4.0	1.873	0.129	6.0	–2.35	1.815

изменение величины d в 2.2, 1.1, 1.3 и 1.6 раза соответственно. Однако наибольшее влияние на глубину d оказывает непроницаемый участок: данные таблицы показывают, что при возрастании ширины L всего на 28% глубина d увеличивается почти в 10 раз.

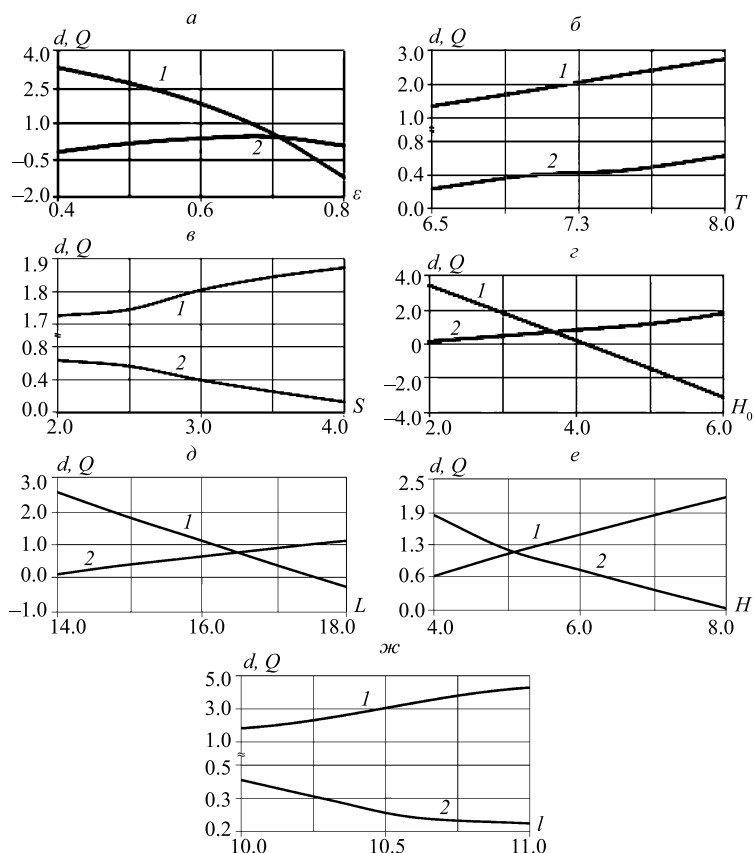


Рис. 3. Зависимости величин d (1) и Q (2) от разных параметров

a — от ε при $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 7$, $l = 10$; $б$ — от T при $\varepsilon = 0.6$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 7$, $l = 10$; $в$ — от S при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 7$, $l = 10$; $г$ — от H_0 при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $S = 3$, $L = 15$, $H = 7$, $l = 10$; $д$ — от L при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $H = 7$, $l = 10$; $е$ — от H при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $l = 10$; $ж$ — от l при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 7$.

При $\varepsilon = 0.8$, $H_0 = 5$ и 6 и $L = 18$, т. е. при достаточно больших параметрах ε , H_0 и L , свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс, при этом значения d отрицательные. Если ввести безразмерную величину $h(d) = (S - d)/S$, $h(S) = 0$,

при варьировании $\varepsilon, T, S, H_0, L, H, l$

L	d	Q	H	d	Q	l	d	Q
14	2.555	0.086	4.0	0.650	1.815	10.0	1.804	0.394
16	1.116	0.599	5.0	1.070	1.159	10.3	2.018	0.320
17	0.413	0.888	6.0	1.441	0.769	10.6	2.229	0.253
18	-0.256	1.084	8.0	2.155	0.038	11.0	2.478	0.230

характеризующую относительную высоту поднятия грунтовой воды за шпунтом, то для указанных параметров ε, H_0 и L соответственно получаем $h(-1.1945) = 1.3981$, $h(-0.9297) = 1.3099$, $h(-2.3500) = 1.7833$ и $h(-0.2560) = 1.0853$, причем параметр h растет с увеличением ординаты точки G выхода кривой депрессии из-под шпунта. Зависимости глубины d от параметров T, H_0, L и H близки к линейным.

Что касается расхода, то чем больше ширина непроницаемого включения, тем значительно изменяется величина Q : из таблицы следует, что при росте параметра L в 1.28 раза расход увеличивается более чем в 12 раз. Таким образом, выявляется значительное подпирющее воздействие непроницаемого участка по отношению к фильтрации из котлована.

Подобное поведение расхода наглядно прослеживается как с увеличением мощности слоя, ширины котлована и напора в нижележащем горизонте, так и с уменьшением длины шпунта и напора в бьефе. Из таблицы вытекает, что снижению параметра H всего в 2 раза сопутствует рост расхода Q почти в 48 раз, что свидетельствует о наибольшем влиянии на расход напора воды в котловане.

4. Предельные случаи. 1. *Случай $H_0 = 0$.* Остановимся прежде всего на случае отсутствия подпора, т. е. движении при $H_0 = 0$. Решение для него получается из зависимостей (9)–(14) при $\gamma = \gamma_* = 0$. При таком значении параметра γ круговой разрез EG области w , трансформируясь, вырождается в правую полуокружность (штриховая линия на рис. 2), и таким образом исходная область превращается в круговой шестиугольник, у которого выпадает правая часть полукруга $|w - i(1 + \varepsilon)/2| < (1 - \varepsilon)/2$. В плоскости течения z при $\gamma = \gamma_*$ кривая депрессии выполаживается в точке E , с которой сливается ее точка перегиба F , и выходит на кровлю нижележащего горизонта под прямым углом.

Отметим, что для $\varepsilon = 0.7$, $T = 6$ и 6.5 , $S = 3$, $L = 15$, $H = 5$ и $l = 10$, при которых величина d становится отрицательной, параметр h составляет 1.2191, 1.2020, 1.0140, 1.0443, 1.0638 и 1.0442 соответственно.

2. *Случай $l = \infty$.* Рассмотрим случай, когда ширина котлована неограниченно возрастает. Если совершить преобразование $z' = z + l$, переведя точку A' в начало координат, и зафиксировать все физические параметры модели, то по мере увеличения ширины котлована l постоянная конформного отображения $b \rightarrow b_* = \rho/2$. В пределе при $l = \infty$ параметры $b = b_*$, $B = 1$. В плоскости движения z точки B и C сливаются на бесконечности, так что область фильтрации становится полубесконечной слева полосой затопления. Из (9)–(14) при $b = b_*$ вытекают результаты, полученные ранее [15].

3. *Случай $L = 0$.* В основной фильтрационной схеме, рассмотренной выше, случай отсутствия такого мощного фактора как непроницаемое включение, являясь предельным, служит фоном при оценке роли инфильтрации и напора в нижележащем пласте и позволяет более контрастно проследить за взаимодействием таких важных физических параметров как ε и H_0 .

Если отсутствует непроницаемый участок на кровле нижележащего водоносного горизонта, то последний на всем протяжении становится хорошо проницаемым. При слиянии точек C и D в области комплексной скорости w ее левая полуплоскость отсекается, круговой разрез EG переходит в правую полуплоскость, а исходная область трансформируется в круговой треугольник. В плоскости движения z точка D , сливаясь с точкой C , выходит на ось ординат, а прямоугольник плоскости τ преобразуется в полуполосу $0 < \operatorname{Re} \tau < 1/2$, $0 < \operatorname{Im} \tau < \infty$, поскольку параметр $\rho = K'/K = \infty$, $K = \pi/2$.

Решение для этого предельного случая получается из формул (9)–(14), если в них положить $k = 0$ и учесть, что при этом эллиптические функции вырождаются в тригонометрические, а тета-функции обрываются на своих первых членах или константах:

$$\Omega = -\varepsilon N \frac{\sin 2r' \sin 2(\tau - m')}{\sin 2m' \cos \tau \Delta(\tau)}, \quad Z = iN \frac{\sin 2(\tau - r')}{\cos \tau \Delta(\tau)}, \quad (15)$$

$$\Delta(\tau) = \sqrt{(a - \sin^2(\tau)(b - \sin^2\tau)(c - \sin^2\tau)}, \quad \varepsilon = \operatorname{tg} 2m' \operatorname{ctg} 2r',$$

где $m' = \arcsin \sqrt{m}$, $r' = \arcsin \sqrt{r}$, $m', r', c' (0 < m' < r' < a' < b' < c' < \pi/2)$ — прообразы точек M, R, C на оси абсцисс плоскости τ .

4. *Случай $\varepsilon = 0$.* В случае $L = 0$ остановимся на отсутствии инфильтрации. Учитывая связь между параметрами m' и r' , отмеченную в (15), видим, что, когда $\varepsilon = 0$, решение задачи вытекает из зависимостей (15) при $m' = 0$, т. е. когда в плоскости τ точки кривой депрессии G и E сливаются в начале координат с точкой M нулевой скорости.

Таким образом, получается решение задачи, впервые рассмотренной В. В. Ведерниковым [10], только другим способом.

5. Случай конечной величины скорости обтекания на конце шпунта. Анализ задачи Жуковского. В рамках краевой задачи (2) рассмотрим случай, когда скорость обтекания на конце шпунта v_R , $0 < v_R < \varepsilon$, конечна и функция тока на водопроницаемых участках AB и DE не имеет экстремумов. Тогда в области комплексной скорости w исчезают оба вертикальных разреза, левая полуплоскость отсекается, как и ранее при $L = 0$, однако, в отличие от последнего, участок MR переносится в первый квадрант. В результате исходная область превращается в круговой пятиугольник.

Параметрическое решение задачи формально имеет прежний вид (9) с заменой интегралов $Y_{1,2}(\tau)$ и постоянных конформного отображения α и β на следующие [24]:

$$Y_{1,2}(\tau) = \vartheta_0^{-1}(\tau) \vartheta_1(\tau \pm i\gamma) \exp(\pm i\pi\tau), \quad (16)$$

$$\alpha = \beta = (1 + i\rho)/2. \quad (17)$$

Решение аналогичной задачи для случая отсутствия подпора вытекает из представлений (9), (16), (17) при $\gamma = \gamma_*$.

Анализ проведенных численных результатов показывает, что при $v_R < \infty$ сохраняется качественный характер зависимостей фильтрационного расхода от физических параметров схемы, свойственный случаю $v_R = \infty$. Например, наблюдается тот же, как и ранее, характер поведения расхода от величин T и l , с одной стороны, и противоположный от параметров S и H — с другой. Существенное влияние на расход Q по-прежнему оказывают инфильтрация, непроницаемое включение и мощность слоя.

На рис. 4 изображена картина движения, рассчитанная при $\varepsilon = 0.5$, $T = 6$, $S = 3$, $H_0 = 0$, $L = 16.2$, $H = 3.8$, $l = 15$. Обращает на себя внимание то, что для всех расчетных вариантов $d = S$ и, следовательно, $h(d) = h(S) = 0$. Это означает, что в плоскости течения точка G выхода кривой депрессии из-под шпунта сливается с точкой R его острия; из рассмотрения области комплексной скорости w следует, что в таком случае скорость на конце шпунта равна интенсивности инфильтрации: $v_R = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$).

2. *Ведерников В. В.* Влияние капиллярности грунта на фильтрацию со свободной поверхностью // Докл. СССР. 1936. Т. 3(4). С. 157–161.
3. *Аравин В. И.* Приток грунтовых вод к котловану, огражденному шпунтами // Изв. Всесоюз. науч.-исслед. ин-та гидротехники. 1937. Т. 20. С. 74–89.
4. *Козлов В. С.* Гидромеханический расчет шпунтовых перемычек // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1939. № 6. С. 89–110.
5. *Ведерников В. В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
6. *Нельсон-Скорняков Ф. Б.* Гидромеханический расчет протекания воды к котловану // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1943. № 7. С. 90–94.
7. *Нельсон-Скорняков Ф. Б.* Некоторые случаи притекания грунтовой воды из реки к карьере (котловану) // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1944. № 3. С. 209–220.
8. *Нельсон-Скорняков Ф. Б.* Фильтрация в однородной среде. 2-е изд. М.: Советская наука, 1949. 568 с.
9. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. М.: Стройиздат, 1948. 616 с.
10. *Ведерников В. В.* Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя // Докл. СССР. 1949. Т. 69(5). С. 619–622.
11. *Аптекарь Л. Д.* Вопросы фильтрационного расчета горизонтального дренажа судоводных шлюзов и сухих доков // Изв. Всесоюз. науч.-исслед. ин-та гидротехники. 1951. Т. 46. С. 80–105.
12. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 664 с.
13. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / отв. ред. П. Я. Полубаринова-Кочина. М.: Наука, 1969. 546 с.
14. *Жуковский Н. Е.* Просачивание воды через плотины // Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1950. Т. 7. С. 297–332.
15. *Береславский Э. Н.* О некоторых гидродинамических моделях, связанных с задачей Жуковского об обтекании шпунта // Докл. РАН. 2013. Т. 448(5). С. 529–533.
16. *Береславский Э. Н., Кочина П. Я.* О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 3–7.
17. *Береславский Э. Н., Кочина П. Я.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1997. № 5. С. 9–17.
18. *Кочина П. Я., Береславский Э. Н., Кочина Н. Н.* Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1: препринт № 567. М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. 112 с.
19. *Береславский Э. Н.* О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 3–7.
20. *Береславский Э. Н.* О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33(3). С. 296–301.
21. *Береславский Э. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48(4). С. 590–594.
22. *Береславский Э. Н.* Применение метода Полубариновой-Кочиной для исследования фильтрационных течений из котлованов, огражденных шпунтами Жуковского // Докл. РАН. 2014. Т. 455(6). С. 651–655.
23. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
24. *Береславский Э. Н.* Моделирование обтекания шпунта Жуковского // Докл. РАН. 2011. Т. 440(1). С. 47–51.

Для цитирования: *Береславский Э. Н.* Моделирование движения грунтовых вод из котлованов, огражденных шпунтами Жуковского // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 124–137. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.201

References

1. *Vedernikov V. V.* Vliyanie kapillarnogo podnjatija na fil'traciju iz kanalov [Influence of capillary rise in the filtration channel]. *Gidrotehnicheskoe stroitel'stvo* [Hydraulic engineering], 1935, no. 5, pp. 20–27. (In Russian)

2. Vedernikov V. V. Vlijanie kapilljarnosti grunta na fil'traciju so svobodnoj poverhnost'ju [Effect of soil capillary filtration with free surface]. *Dokl. SSSR [Papers of Academy of Sciences USSR]*, 1936, vol. 3(4), pp. 157–161. (In Russian)
3. Aravin V. I. Pritok gruntovyh vod k kotlovanu, ograzhdenному shpuntami [The inflow of groundwater to the trenches, fences tongue]. *Izvestia VNIIG [Proceeding Izvestia VNIIG]*, 1937, vol. 20, pp. 74–89. (In Russian)
4. Kozlov V. S. Gidromehanicheskiy raschet shpuntovyh peremychek [Hydromechanical calculation sheet jumpers]. *Izvestia SSSR. OTH [Proceeding of USSR. OTN]*, 1939, no. 6, pp. 89–110. (In Russian)
5. Vedernikov V. V. *Teoriya fil'tracii i ee primenenie v oblasti irrigacii i drenazha [Filtration theory and its application in the field of irrigation and drainage]*. Moscow; Leningrad, Gosstroyizdat Publ., 1939, 248 p. (In Russian)
6. Nelson-Skvornnyakov F. B. Gidromehanicheskiy raschet protekanija vody k kotlovanu [Hydro water flow calculation to the trench]. *Izvestia SSSR. OTH [Proceeding of USSR. OTN]*, 1943, vol. 7, pp. 90–94. (In Russian)
7. Nelson-Skvornnyakov F. B. Nekotorye sluchai pritekanija gruntovoj vody iz reki k kar'eru (kotlovanu) [Hydro water flow calculation to the trench]. *Izvestia SSSR. OTH [Proceeding of USSR. OTN]*, 1943, vol. 7, pp. 90–94. (In Russian)
8. Nelson-Skvornnyakov F. B. *Fil'tracija v odnorodnoj srede [Filtration in a homogeneous medium]*. 2-e ed. Moscow, Soviet science Publ., 1949, 568 p. (In Russian)
9. Aravin V. I., Numerov S. N. *Fil'tracionnye raschety gidrotehnicheskikh sooruzhenij [Filtration calculations of hydraulic structures]*. Moscow, Stroyizdat Publ., 1948, 616 p. (In Russian)
10. Vedernikov V. V. Fil'tracija pri nalichii drenirujushhego ili vodonosnogo sloja [Filtering in the presence of drainage or water-bearing layer]. *Dokl. AN SSSR [Papers of Academy of Sciences USSR]*, 1949, vol. 69, no. 5, pp. 619–622. (In Russian)
11. Aptekar L. D. Voprosy fil'tracionnogo rascheta gorizontalnogo drenazha sudohodnyh shljuzov i suhih dokov [Questions filtration calculation of horizontal drainage shipping locks and dry docks]. *Izvestia VNIIG [Proceeding Izvestia VNIIG]*, 1951, vol. 46, pp. 80–105. (In Russian)
12. Polubarinova-Kochina P. Y. *Teoriya dvizhenija gruntovyh vod [Theory of movement of groundwater]*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1977, 664 p. (In Russian)
13. *Razvitie issledovanij po teorii fil'tracii v SSSR (1917–1967) [Development of research on the theory of filtration in the USSR (1917–1967)]*. Otv. red. P. Y. Polubarinova-Kochina. Moscow, Nauka Publ., 1969, 546 p. (In Russian)
14. Djukovskii N. E. Prosachivanie vody cherez plotiny [Seepage of water through the dam]. *Collected works*. Moscow, Gostehizdat Publ., 1950, vol. 7, pp. 297–332. (In Russian)
15. Bereslavskii E. N. O nekotoryh gidrodinamicheskikh modeljah, svjazannyh s zadachej Zhukovskogo ob obtekanii shpunta [About some hydrodynamic schemes of flow around the rabbit of Zhukovskiy]. *Dokl. RAN [Papers of RAN]*, 2013, vol. 448, no. 5, pp. 529–533. (In Russian)
16. Bereslavskii E. N., Kochina P. Y. O nekotoryh uravnenijah klassa Fuksa v gidro- i aeromehanike [About some classes of equations of Fuchs in the hydro- and aeromechanics]. *Izvestia AN SSSR. MJG [Proceeding of AN USSR. Fluid Dynamics]*, 1992, no. 5, pp. 3–7. (In Russian)
17. Bereslavskii E. N., Kochina P. Y. O differencial'nyh uravnenijah klassa Fuksa, vstrechajushhihsja v nekotoryh zadachah mehaniki zhidkostej i gazov [Differential equations of Fuchs class encountered some problems of mechanics of liquids and gases]. *Izvestia AN SSSR. MJG [Proceeding of AM USSR. Fluid Dynamics]*, 1997, no. 5, pp. 9–17. (In Russian)
18. Kochina N. N., Bereslavskii E. N., Kochina P. Y. *Analiticheskaja teoriya linejnyh differencial'nyh uravnenij klassa Fuksa i nekotorye zadachi podzemnoj gidromehaniki [Analytical theory of linear differential equations of the Fuchs class and some problems of underground hydromechanics]*. Pt 1. Preprint 567. Moscow, Institute of Problem in Mechanics RAN Publ., 1996, 112 p. (In Russian)
19. Bereslavskii E. N. O konformnom otobrazhenii nekotoryh krugovyh mnogougol'nikov na prjamougol'nik [Conformal mapping of some circular polygons on a rectangle]. *Izvestia vuzov. Matematika [Proceeding of Higher Education Institutions. Mathematics]*, 1980, no. 5, pp. 3–7. (In Russian)
20. Bereslavskii E. N. O differencial'nyh uravnenijah klassa Fuksa, svjazannyh s konformnym otobrazheniem krugovyh mnogougol'nikov v poljarnyh setkah [Differential equations of Fuchs class associated with the conformal mapping of circular polygons in polar grids]. *Differenc. uravnenija [Differential Equations]*, 1997, vol. 33, no. 3, pp. 297–301. (In Russian)
21. Bereslavskii E. N. O nekotoryh differencial'nyh uravnenijah klassa Fuksa, vstrechajushhihsja v zadachah mehaniki zhidkostej i gazov [On some differential equations class Fuchs, occurring in problems of mechanics of liquids and gases]. *Differenc. uravnenija [Differential Equations]*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 590–594. (In Russian)
22. Bereslavskii E. N. *Primenenie metoda Polubarinovoj-Kochinoj dlja issledovanija fil'tracionnyh techenij iz kotlovanov, ograzhdennyh shpuntami Zhukovskogo [Application of Polubarinova-Kochina to*

study seepage flows from the trenches, fenced tongue Zhukovsky]. *Dokl. RAN [Papers of Academy of RAN]*, 2014, vol. 455, no. 6, pp. 651–655. (In Russian)

23. Golubev V. V. *Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij [Lectures on the analytic theory of differential equations]*. Moscow, Leningrad, Gostehizdat Publ., 1950, 436 p. (In Russian)

24. Bereslavskii E. N. Modelirovanie obtekanija shpunta Zhukovskogo [Simulation flow tongue Zhukovsky]. *Dokl. RAN [Papers of Academy of RAN]*, 2011, vol. 440, no. 1, pp. 47–51. (In Russian)

For citation: Bereslavskii E. N. Modeling the movement of groundwater from the pits, surrounded with piles of Zhukovsky. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 124–137. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.201

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 12 октября 2016 г.

Статья принята к печати 11 апреля 2017 г.